Parte 1 Límite

La idea de esta parte es que se lleven una noción de lo que es el límite, que para todos lo que vayan a estudiar algo con matemática, es la base de todo. Entonces empezamos interpretando el límite a partir de las sucesiones que veníamos trabajando. Sea una sucesión dada por un término general o la sucesión con muchos elementos de su conjunto. Entonces voy a tomar varios ejemplos para que vean donde van esos términos y luego dar una definición de límites.

Vuelvo a repetir con este trabajo quiero que se lleven una noción de esto y puedan interpretar hacia donde van estas sucesiones y luego funciones que vamos a analizar.

Veamos la definición de limite y luego unos ejemplos de sucesiones.

Definición: Idea intuitiva de una sucesión o función que está muy cerca de tomar una valor "L" pero no llega a ser ese valor. Diremos entonces que el límite de una sucesión o función cuando X va hacia infinito o hacia un valor puntual es el valor "L" o no tiene valor (es decir, no tiene dicho límite).

Y lo notamos como $\lim_{x \to \infty} a_n = l$ donde L es el valor tan cercano del que estamos hablando y a_n una sucesión

En el caso de las funciones los escribiríamos de la siguiente manera $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$

Veamos las siguientes sucesiones y hacia dónde va su límite, recuerden que si sabemos el término general, podemos ver cuáles son los términos que queramos de la misma.

Ejemplo:

$a_n = \frac{1}{n}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ En esa sucesión al parecer los valores se van haciendo más chicos, si seguimos buscando más valores, nos da la idea de que se acerca cada vez más al 0, entonces el limite nos quedaría

$$\lim_{x \to \infty} a_n = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ejemplo:

$b_n = n^2$; $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ Al parecer esta sucesión se hace cada vez más grande, entonces viendo hacia dónde van los términos, podemos decir que se va hacia el infinito. Entonces en este caso nos quedaría.

$$\lim_{x \to \infty} b_n = \lim_{x \to \infty} n^2 = \infty$$

Ejemplo:

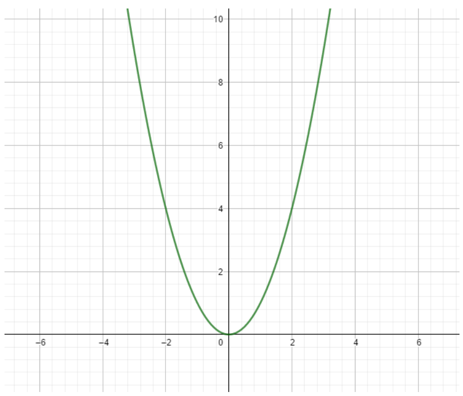
$C_n = (-1)^n$; $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ Al parecer esa sucesión va a hacer siempre lo mismo y nos sabemos si va hacia el 1 o hacia el -1, entonces en estos casos donde no quede claro. Vamos a decir que LA SUCESION NO TIENE LIMITE.

Acabamos de ver el límite en distintas sucesiones. La idea principal es que veamos el límite en funciones. Como ya vimos en las clases vamos a poner algunos ejemplos gráficos, donde ustedes puedan ver hacia donde TIENDE la X cuando calculamos el limite.

Por si todavía no quedo claro, decimos TIENDE o TENDER, porque el limite no llega a ser ese valor, si no que se aproxima tanto tanto que asemeja a serlo.

Entonces ahora vamos a analizar también algunas funciones como gráficos, para que puedan interpretar hacia donde tienden.

Ejemplo:

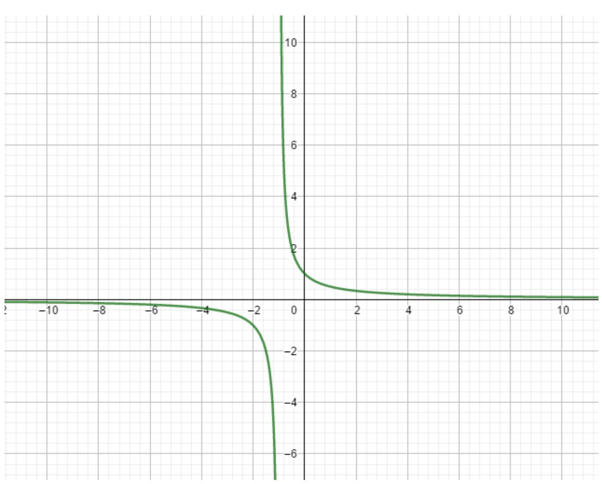


Veamos este dibujo, cuando X empieza a ir hacia la derecha el limite se hace cada vez más alto es decir que sube y se va hacia infinito en Y. Entonces el límite en este caso va hacia infinito y anotamos $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Veamos también en este caso, como podemos analizar también, donde va Y cuando X va hacia menos infinito, es decir, el infinito negativo. Vean que Para los valores de Y cuando X se hace más negativo, los valores de Y se hacen más altos, es decir que también se va para infinito positivo y anotamos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

Noten en el último que escribí menos infinito abajo del límite. Para que noten la diferencia, hacia donde va X.

Ejemplo:



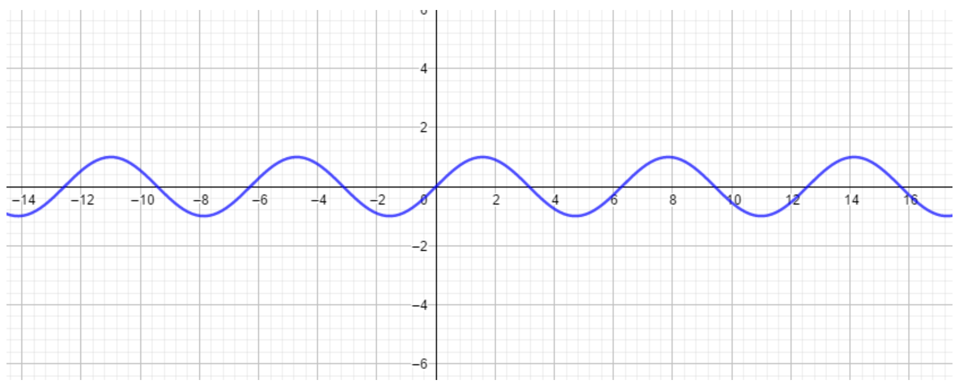
Veamos este ejemplo ahora, cuando X se hace cada vez más grande. ¿Qué pasa con Y? Se parece cada vez más y más al 0. Pero nunca llegar a serlo entonces vamos a decir que cuando x va hacia infinito esa Y tiende a 0, que es lo mismo que escribir el límite de la función. Y quedaría $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

Como hicimos anteriormente, veamos qué pasa cuando ese límite va hacia menos infinito, fíjense que también se hace 0. Cuando X toma valores muy muy negativos, al parecer Y también tiene a 0. Entonces nos quedaría:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$. Tomando el límite hacia menos infinito.

No necesariamente los 2 límites, de infinito y menos infinito tienen que ser siempre iguales.

Ejemplo:



Veamos que pasa acá, fíjense que cuando X empieza a subir, no tenemos un valor claro para lo que pasa ahí, porque sube y baja todo el tiempo. Al parecer entre los valores que sube y baja son el 1 y el -1. Pero no tiene uno claro. Cuando pasa eso vamos a decir que no tiene límite. Es decir, que cuando tengamos 2 valores o más, no sabemos cuánto es el límite.

Por último, como para cerrar la idea, vamos a ver diferentes límites en funciones analíticamente escritas y no como gráficamente como las vimos anteriormente. La idea de esos ejemplos es que ustedes los analicen solos y puedan interpretar lo que está pasando, sea remplazando valores o intentando graficarlas aunque sea difícil. Una de las formas por ejemplo es ver qué valores va tomando si X sube o baja.

Ejemplo:

Calculemos $\lim_{x\to\infty} 4x^3 =$

Fíjense si empiezo a darle valores a X, es decir, hacer una tabla de valores o remplazar en la función. Puedo ver que cada vez sube más.

$$f(1)=4$$
$$f(2)=4\cdot 2^3=24$$
$$f(4)=4\cdot 4^3=256$$
$$f(7)=4\cdot 7^3=9604$$

No hace falta seguir más valores para notar que eso se hace cada vez más grande y que el límite tiende a infinito.

$$\lim_{x \to \infty} 4x^3 = \infty$$

Parte 2: Combinatoria

La combinatoria es la rama de la matemática que estudia las diversas formas de agrupar elementos de un conjunto. Nosotros veremos justamente eso, como agrupar elementos dependiendo de su orden y/o repetición, a partir de unas formulas. Pero antes deberemos detallar dos operaciones nuevas. Una es el factorial y la otra el número combinatorio. Explicadas a continuación.

Factorial de un número:

Es el producto de todos los números naturales anteriores o iguales a él. Y se nota con el signo de exclamación !.

Notación:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

En ese caso estaríamos calculando el producto de todos los números anteriores a n hasta llegar al 1.

Propiedades del factorial a tener en cuenta:

. $1! = 1$

. $0! = 1$

Ejemplo:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Número combinatorio

El número combinatorio es una escritura que funciona para establecer agrupaciones en las que no importa el orden y los elementos no se repiten. Y crea una cantidad R de grupos de un conjunto de N elementos. Es decir, si un conjunto tiene 10 elementos y quiero ver cuántos grupos de 3 puedo armar utilizo el número combinatorio.

Notación:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Propiedades del número combinatorio:

. $\binom{n}{0} = 1$. $\binom{n}{n} = 1$. $\binom{n}{1} = n$

Ejemplo:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

Luego de haber visto que es el factorial y el número combinatorio pasaremos a ver los distintos casos que se nos pueden presentar a la hora de resolver los ejercicios. Los casos son 6, estos van a depender del orden y la repetición. Los vamos a detallar al siguiente con un ejemplo para cada uno y su formula correspondiente.

Analicemos primero los casos SIN REPETICION, es decir, donde ningún elemento del conjunto se repite.

Permutaciones sin repetición:

Las permutaciones sin repetición son posibles ordenaciones de un conjunto de N elementos distintos sin que alguno de ellos se repita.

Se calculan haciendo el factorial de la cantidad de elementos del conjunto. Es decir, para saber las posibles ordenaciones de un conjunto con N elementos, hacemos:

$P_{SR} = n!$ Donde n son la cantidad de elementos del conjunto.

Donde P_{SR} son permutaciones sin repetición.

Ejemplo:

¿Cuántos números de 5 cifras distintos pueden escribirse con los números 2, 3, 5, 8 y 9?

Es primordial notar que es SIN REPETICION es decir, que ninguno de los elementos del conjunto se repite. Y necesito saber la cantidad de posibles ordenaciones del mismo. Entonces, es una PERMUTACION SIN REPETICION y como la cantidad de elementos a tomar del conjunto es 5, entonces:

$$P_{SR} = n! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Donde P_{SR} son permutaciones sin repetición

Entonces, existen 120 números distintos de 5 cifras que puedo armar con esos números.

Combinaciones sin repetición:

Las combinaciones sin repetición son posibles muestras sin orden de un conjunto de R elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de N elementos.

Noten que la clave en este es ver que es SIN REPETICIÓN y que NO IMPORTA EL ORDEN. A tener en cuenta esas dos cosas a la hora de resolver los problemas.

¿Cómo lo calculo?

A partir del número combinatorio, es decir, necesito tomar R elementos sin orden de un conjunto de N elementos entonces:

$$C_{SR}=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Donde C_{SR} son combinaciones sin repetición

Ejemplo:

En un curso de 17 alumnos necesito formar grupos de 4 personas. ¿Cuántos grupos puedo formar en total?

Notemos que los alumnos no se repiten entonces es SIN REPETICION y la verdad que el orden no me interesa porque me da igual si Pedrito esta primero segundo o tercero en el grupo, entonces es SIN ORDEN. Tengo 17 elementos y los tengo que tomar de a 4 y hago la formula.

$$C_{SR}=\binom{17}{4}=\frac{17!}{4!(17-4)!}=\frac{17!}{4!13!}=2380$$

<u>Variaciones sin repetición:</u>

Las variaciones sin repetición son posibles muestras ordenadas de R elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de N elementos. Notemos que es SIN REPETICION Y CON ORDEN. La diferencia es sutil, pero es la clave del ejercicio. Poder ver que estas variaciones me interesa el orden.

¿Cómo lo calculo?

Va a ser muy similar las combinaciones pero sin eliminar los casos que antes se repetían, porque ahora si me interesa quien queda en primer segundo o tercer lugar. Entonces calculamos:

$V_{SR}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ Donde N es el total de elementos del conjunto y R son los elementos a tomar.

V_{SR} son las variaciones sin repetición

Ejemplo:

En una carrera con 10 atletas ¿De cuantas formas podrían repartirse las medallas de oro, plata y bronce?

Primero veamos que son 10 atletas y yo necesito 3 para los podios. Es decir, de 10 tomo grupos de 3, hasta ahora vamos bien. Pero, veamos que no puedo repetir y que el orden me interesa porque creeríamos que no les da igual salir primero, segundo o tercero. Entonces es SIN REPETICION Y CON ORDEN.

$$V_{SR}=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=720$$

Hasta ahora vimos los 3 casos SIN REPETICION. A continuación veamos los próximos 3 que si utilizan la repetición como característica.

<u>Permutaciones con repetición:</u>

La idea la permutación es agrupar ahora elementos de un conjunto de N elementos. Similar al anterior con la diferencia de que podemos repetir elementos de este conjunto.

¿Cómo lo calculo?

La fórmula para este, va a ser similar, pero vamos a eliminar (dividiendo) los casos que se van a repetir.

Entonces la formula sería $P_{CR} = \frac{n!}{\alpha ! \cdot \beta ! \cdot \delta ! \dots}$

Donde N son la cantidad de elementos y $\alpha, \beta, \delta \dots$ son la cantidad de veces que puedo tener ciertos elementos repetidos. Los puntos suspensivos van porque no sé cuantos elementos de un conjunto puedo llegar a repetir.

P_{CR} Serian permutaciones con repetición.

Ejemplo:

¿Cuántos números distintos de 7 cifras se pueden escribir usando los siguientes números 7, 7, 7, 4, 4 ,1 ,8?

Veamos que el total tenemos 7 elementos en el conjunto, es decir que N es 7. Ahora veamos a cantidad de veces que se repiten esos elementos. El 7 se repite 3 veces, el 4 se repite 2 veces, el 1 una vez y el 8 otra vez. Es decir que, los números de repeticiones van a ser 3, 2, 1 y 1. Veamos cómo queda en la formula.

$$P_{CR} = \frac{n!}{\alpha ! \cdot \beta ! \cdot \delta ! \dots} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = \frac{7!}{6 \cdot 2} = 420$$

Existen 420 números que cumplen esa condición.

<u>**Combinaciones con repetición:**</u>

Las combinaciones con repetición son posibles muestras no ordenadas de R elementos no necesariamente distintos que puedo extraer de un conjunto de N elementos. Es decir, extraigo elementos de un conjunto en cual pueden ser REPETIDOS y donde NO ME INTERESA EL ORDEN.

¿Cómo lo calculo?

Lo vamos a calcular a partir de la siguiente formula

$$C_{CR} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n+r-1-r)!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Donde C_{CR} son las combinaciones con repetición y N son los elementos del conjunto, R son los elementos que tomo.

Ejemplo

Un banco ofrece un regalo a elegir entre 5 posibles regalos por cada caja de ahorro. Un señor que tiene tres cajas de ahorro en dicho banco ¿De cuántas formas puede elegir el lote de tres obsequios si no le importa repetir regalos?

Notemos que en este tengo 5 elementos en el conjunto y necesito tomar de a 3. Con repetición y sin orden. Entonces N es 5 y R es 3. Veamos:

$$C_{CR}=\binom{n+r-1}{r}=\binom{5+3-1}{3}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=35$$

Variaciones con repetición:

Muestras ordenadas de R elementos no necesariamente distintos que se pueden extraer de un conjunto de N elementos. Veamos que no solo es con repetición si no que al ser variaciones ME INTERESA EL ORDEN.

¿Cómo lo calculo?

Sabiendo que N es el total de elementos del conjunto y R es el conjunto a extraer. Entonces:

$$V_{CR}=n\cdot n\cdot n\cdot n...=n^r$$

Ejemplo:

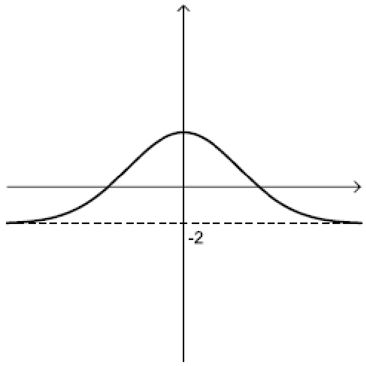
¿Cuántos números de 6 cifras puedo escribir con los números 6, 4, 3 y 8?

Notemos que cuentan todos los casos, así que el orden me interesa y aparte puedo repetir los números como yo quiera. Este es un poco más difícil de observar, notemos que 4 es la cantidad de elementos de mi conjunto, porque los elementos son 6, 4, 3 y 8. Entonces N es 4, pero los puedo poner en 6 posiciones diferentes, porque el número es de 6 cifras, entonces R es 6. Veamos:

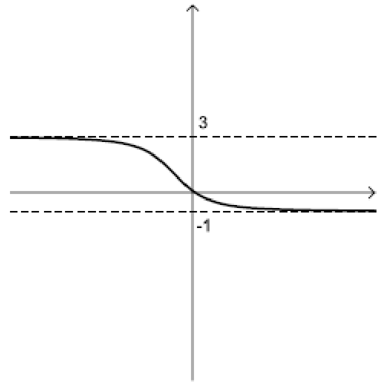
$$V_{CR}=n\cdot n\cdot n\cdot n...=n^r=4^6=4096$$

Trabajo para entregar N° 5 y ÚLTIMO

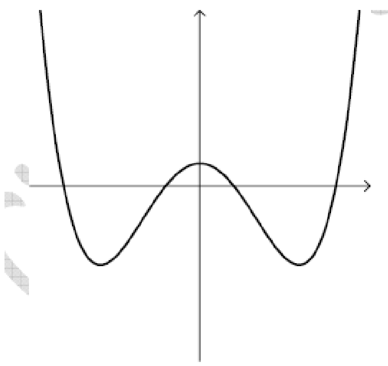
1. Calcular el límite de las siguientes sucesiones.
   a) $1,2,3,4,5,6,7...$
   b) $45,30,15,0,-15,-30...$
   c) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$
   d) $a_n=3^n$
2. Analizando los siguientes gráficos. Calcular el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ de las siguientes funciones:



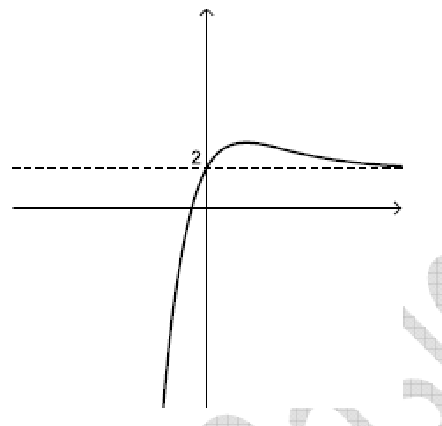
a)



c)



b)



d)

3. Calcular los siguientes limites
   a) $\lim_{x\to\infty} -x^2 =$
   b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} =$
   c) $\lim_{x\to\infty} x^2 + x + 1 =$
   d) $\lim_{x\to\infty} \cos(x) =$
   e) $\lim_{x\to\infty} 1^n =$

4. Dar una definición informal de lo que para ustedes es el límite y proponer un ejemplo de una sucesión y otro de otra función que tengan diferentes límites.
5. Resolver los siguientes ejercicios usando combinatoria
   a) ¿De cuantas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero de un club de futbol sabiendo que hay 13 candidatos posibles?
   b) En una clase de 15 alumnos se van a distribuir 4 premios. Averiguar de cuantas formas pueden hacerse si: los premios son iguales y si los alumnos pueden ganar más de un premio.
   c) ¿Cuántas palabras se pueden escribir con las letras de SOBRE? Sin repetir ninguna.
   d) ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?
   e) ¿Cuántas palabras se pueden escribir con las letras de SOBRE? Repitiendo las letras.
   f) ¿Cuántos números de 9 cifras puedo formar con cuatro 7, tres 2 y dos 1?

6. ¿Cuántos números de 4 dígitos puedo formar con los números del 1 al 9? Cumpliendo las siguientes normas:
    a) Permitiendo repeticiones
    b) Sin repeticiones
    c) Si el último digito es 1 y no permito repeticiones.
7. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse 6 personas?
    a) En una fila de 5 sillas
    b) En una fila de 6 sillas
8. Realizar un escrito CON SUS PROPIAS PALABRAS de no más de una carilla de lo que a ustedes les quedo de alguno de los temas vistos durante el año. Sea, desde sucesiones, limites, combinatoria o algunas de las clases extras que tengamos al final.