Trabajo Práctico N° 4 Matemática 5to

¿Qué onda? Ya maso menos saben cómo manejamos estos trabajos. Cualquier duda, pregunta o consulta hablan al grupo o me mandan al wtp. Voy a detallar un poco lo que hicimos en las clases, para que les sirva a todos, desde los que no estuvieron en clase hasta los que sí.

Sigo recomendando que aparezcan en los zooms porque hay cosas que hicimos que no las voy a escribir acá y aparte pueden sacar dudas sobre lo que vamos haciendo.

Mail: alejandro.petrillo@gmail.com

Wtp: **11-40754757**

Fecha de entrega: **10 de Septiembre**

Polinomios 3.0

Claramente seguimos con polinomios. Voy a detallar un poco las clases que tuvimos por zoom con un poco de teoría y ejemplos.

Clase de 21/8

Lo que hicimos en esta clase, fue ver el teorema del resto y luego empezar con factorización.

¿Qué es el teorema del resto?

En el trabajo N° 3 estuvimos viendo cómo dividir a partir de la regla de Ruffini y a la hora de dividir siempre teníamos un resto (como pasa en cualquier división). Al hacer Ruffini siempre lo que nos quedaba era el resto de esa división. Lo que les traigo para mostrar ahora es un teorema que nos ayuda a ver el resto de una división sin hacer la división.

Muchas veces este teorema nos ayuda a corroborar si el ejercicio está bien, así que ténganlo en cuenta.

Entonces el teorema del resto nos dice:

Si dividimos un polinomio P(x) entre el termino (x-a), el resto de la división es igual al valor numérico del polinomio P(a).

Veamos con un ejemplo del trabajo 3.

Ejercicio 3 A, trabajo número 3.

$$\left(x^4 - 3x^2 - 2x + 1\right) : \left(x + 4\right)$$

Para el que lo resolvió sabe que el resto de esa división le da 217. Entonces corroborémoslo con el teorema nuevo.

Dice que este resto es igual al valor numérico del calcular $P(a)$ y sabemos que “a” es -4. Entonces calculemos $P(-4)$.

$$P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x + 1$$
$$P(-4) = (-4)^4 - 3 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) + 1$$
$$P(-4) = 256 - 3 \cdot 16 + 8 + 1$$
$$P(-4) = 256 - 48 + 8 + 1$$
$$P(-4) = 217$$

Fíjense como la cuenta nos dio 217 que es a lo que queríamos llegar.

Luego de esto, empezamos con factorización de polinomios.

Factorización:

En matemáticas la factorización es una técnica que consiste en la descomposición en factores de una expresión algebraica (que puede ser un número, una suma o resta, una matriz, un polinomio, etc.) en forma de producto.

Esa es claramente la definición que nos trae wikipedia. Lo que yo quiero que entiendan es que nuestra idea es encontrar otra forma de escribir estos polinomios para poder analizarlos mejor. Entonces, vamos a seguir viendo los polinomios, pero lo vamos a escribir de otra manera.

Noten que la definición dice que vamos a escribir una expresión algebraica (en este caso polinomios), como un producto (multiplicación).

Nuestra idea entonces es escribir nuestro polinomio como una multiplicación de raíces. Y ahora vamos a ver lo que es una raíz.

Raíz:

Las raíces de un polinomio (también llamadas ceros de un polinomio) son los valores para los cuales, el valor numérico del polinomio es igual a cero.

Es decir que, X es raíz del polinomio si $P(x) = 0$

Veamos un ejemplo con el siguiente polinomio

$$P(x) = x^2 + 2x - 8$$

Veamos qué pasa si $x = 1$

$$P(x) = x^2 + 2x - 8$$
$$P(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 8$$
$$P(1) = 1 + 2 - 8$$
$$P(1) = -5$$

Entonces $x = 1$, no es raíz del polinomio.

Ahora veamos qué pasa si $x = 2$

$$P(x) = x^2 + 2x - 8$$
$$P(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 8$$
$$P(2) = 4 + 4 - 8$$
$$P(2) = 0$$

Entonces 2 es raíz del polinomio.

Como dijimos antes nuestra idea es escribir estos polinomios de una forma diferente. Y esta forma sería la de una multiplicación de raíces.

Pasaremos de escribir los polinomios de la manera que venimos trabajando.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde las a son coeficientes principales del polinomio

Y la idea es escribirlo como multiplicación de estas raíces.

$$P(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)(x - x_0)$$

Donde las $x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0$ son raíces del polinomio.

Lo que acabo de escribir es un término general de cómo sería escribirlo de una forma u otra. No es para que se vuelvan locos entendiendo eso. A veces en lo ejemplos se notan mejor estas cosas.

Ahora ustedes dirán, si Ale, re piola todo pero la verdad que como hallo estas raíces tan feas.

Y acá es donde yo saco mi magia y les enseño técnicas para que podamos ver estas raíces y así empezó la clase del 27/8

<u>Clase del 27/8</u>

Ahora después de ver toda esa teoría veremos un teorema y una regla, que nos van a ayudar a encontrar las raíces de una forma más fácil.

<u>Teorema de Gauss</u>

A este señor Gauss le pinto hacer un teorema para que ustedes puedan ver POSIBLES raíces del polinomio.

$$PosiblesRaices = \frac{Divisores\ de\ TI}{Divisores\ de\ CP}$$

Donde TI=Termino Independiente y CP=Coeficiente Principal.

Eso quiere decir, que vamos a encontrar posibles raíces dividiendo los divisores del TI con los divisores del CP.

Veamos un ejemplo con el siguiente polinomio

$$2x^4 + x^2 - x + 6$$

Veamos los divisores del TI=6 y los del CP=2

$$Divisores\ Del\ TI = 6, 3, 2, 1$$

$$Divisores\ Del\ CP = 2, 1$$

Entonces las posibles raíces van a ser el conjunto de divisiones de esos conjuntos de números.

$$PosiblesRaices = \frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}$$

$$PosiblesRaices = 6, 3, \frac{3}{2}, 2, 1, \frac{1}{2}$$

Noten que saque las repetidas.

Entonces achicamos un montón el rango de raíces posibles.

Tengan en cuenta que en esas posibles raíces entran las mismas pero negativas, entonces:

$$PosiblesRaices = -6, -3, -\frac{3}{2}, -2, -1, -\frac{1}{2}$$

<u>Regla de descartes</u>

Este muchacho Descartes, aparte de ser filosofo, le pinto traernos una regla con signos para que veamos posibles raíces positivas y negativas.

La regla dice que el número de raíces positivas del polinomio es o igual al número de cambios de signos o menor por una diferencia par.

Veamos el siguiente ejemplo:

$-x^4+x^3+3x^2-x-2$

Antes de empezar tenemos que tener en cuenta que el polinomio este ORDENADO, si no lo está entonces no va a funcionar la regla.

Como el polinomio esta ordenado, veamos entonces cuantos signos van cambiando entre término y término. Vean que entre la potencia 4 y 3, ya tenemos un cambio de signo (1), después entre la potencia 2 y la 1 tenemos otro cambio de signo (2).

Entonces tenemos 2 cambios de signos, pero noten que la regla dice **"o menor por un diferencia par"** y una diferencia para seria 0. **Entonces podemos tener 2 o 0 posibles raíces positivas.**

Veamos ahora que pasa con las raíces negativas. Tenemos que hacer lo mismo pero ahora vamos a buscar en $P(-x)$. Calculemos:

$$P(-x)=-(-x)^4+(-x)^3+3(-x)^2-(-x)-2$$
$$P(-x)=-x^4-x^3+3x^2+x-2$$

Ahora analicemos que pasa con este caso. Noten, que ahora tenemos cambio de signo entre la potencia 3 y la 2 (1) y luego tenemos otro cambio entre la x y el TI (2). Entonces tenemos 2 cambios de signos, **vamos a decir que podemos tener 2 o 0 raíces negativas.**

<u>Clase del 4/9</u>

Seguimos con lo mismo, como para que no se me pierdan. Ahora la idea es ya ir viendo distintos métodos de factorización directo. Es decir que a partir de algún método ya puedan encontrar la raíz de de una.

Ya lo nombre en la clase pero no hace mal repetirlo. Recuerden que si ustedes hacen Ruffini por la raíz que encuentren van a ir pudiendo factorizar ese polinomio. Entonces ya tienen una forma (molesta capaz) de ir factorizando ese polinomio. Ahora lo que voy a empezar a traer son distintas técnicas que nos van a permitir factorizar casos particulares.

Primero voy a hablar de la famosa formula de Bhaskara o resolvente, que ya trabajaron el año pasado y principio de este año para hacer repaso. ¿Qué hacia esa fórmula? Calculaba las raíces de una función cuadrática. Y me pregunto ¿La función cuadrática no es un polinomio de grado 2? ¡Sí! Recontra si, entonces cuando tengamos un polinomio de grado 2, utilizamos la resolvente y vamos a tener ese polinomio factorizado. Veamos algún ejemplo:

Factorizar a partir de Bhaskara, el siguiente polinomio:

$$P(x)=x^2-2x-3$$

Utilizamos la resolvente $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ sabiendo que $a=1; b=-2; c=-3$. Entonces:

$$\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=$$
$$\frac{2\pm\sqrt{4-(-12)}}{2}=$$
$$\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=$$
$$\frac{2\pm 4}{2}=$$

Y llegamos a que $x_1=3; x_2=-1$. Que serían nuestras raíces y ahora ya sabiendo eso podemos escribir el polinomio de la siguiente manera.

$$P(x)=(x-3)(x+1)$$

Y vamos a sumarle una técnica más que ya la estuvieron trabajando en algún cálculo algebraico pasado.

Factor común

Esta técnica nos va a servir cuando en un polinomio no haya término independiente. Eso quiere decir que una de las raíces es 0. La idea es "absorber" o "tomar" lo que sobra de esas X. Veamos un ejemplo:

$$P(x)=x^6+2x^4-3x^2$$

Vean que no hay término independiente y que de alguna manera puedo sacar factor común X, como si fuera un número. Entonces:

$$P(x)=x^6+2x^4-3x^2$$
$$P(x)=(x^4+2x^2-3)x^2$$

Noten que como x^2 sobraba en todos los términos, lo separe a un costado y ahora nos faltaría factorizar el numero polinomio de grado 4 para terminar con Ruffini o la técnica que quieran.

Noten que en este caso que sacamos factor común X, por lo menos una de las raíces es 0.

Trabajo para entregar N° 4

1. Calcular a parir del teorema del resto, los restos de los polinomios del Ejercicio 3 del Trabajo practico N°3.
2. Decidir si 0, 1 y -2, son raíces de los siguientes polinomios.
   a) $P(x)=x^3+x^2-x-1$
   b) $Q(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$
   c) $S(x)=(x-1)^2(x+2)x$

3. Indicar las posibles raíces racionales de los siguientes polinomios utilizando el Teorema de Gauss
   a) $A(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$
   b) $B(x) = 4x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 16x - 4$
   c) $C(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$
   d) $D(x) = 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 10x - 4$

4. Para los polinomios del ejercicio anterior indicar la cantidad de posibles raíces reales positivas y negativas utilizando la regla de los signos de Descartes
5. Factorizar los siguientes polinomios utilizando Bhaskara.
   a) $A(x) = x^2 - 6x + 9$
   b) $B(x) = -3x^2 + 12x + 180$
   c) $C(x) = -2x^2 + 24x - 72$
   d) $D(x) = x^2 + 7x + 6$
6. Factorizar los siguientes polinomios utilizando factor común.
   a) $A(x) = 2x^2 - 5x$
   b) $B(x) = 3x^4 - 12x^2$
   c) $C(x) = x^7 - x^4 + \frac{3}{2}x^3$
   d) $D(x) = x^4 + 6x^3 + x^2$